Physique Générale : Mécanique

04.07: Equations différentielles ordinaires linaires homogènes, de deuxième ordre, à coefficients constants

Sections
SC, GC & SIE , BA1

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Version du 19.10.2021

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Equations différentielles ordinaires linaires homogènes, de deuxième ordre, à coefficients constants

Exemple: $$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$ Equation de l'oscillateur harmonique amorti

où:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ Pulsation de l'oscillateur non-amorti

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$ Facteur d'amortissement

$$A\,\ddot{x}(t) + B\,\dot{x}(t) + C\,x(t) = 0$$

On a un équation différentielle qui relie la seconde dérivée d'une fonction à sa première dérivée et à la fonction elle-même.

On va utiliser le fait que la dérivée de la fonction exponentielle est toujours une fonction exponentielle, et tester une solution du type:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$$

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

Méthode de résolution

On remplace x(t) et ses dérivées dans l'équation différentielle:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \dot{x}(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$A\,\lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda t} + B\,\lambda\,\mathrm{e}^{\lambda t} + C\,\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$$

En simplifiant les $\mathrm{e}^{\lambda t}$, on obtient **l'équation caractéristique**, i.e. une équation du second degré en λ

$$\boxed{A\,\lambda^2 + B\,\lambda + C = 0}$$

dont les racines sont: $$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

λ_1

λ_2

Si $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ et $\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ sont solutions de l'équation différentielle, alors n'importe quelle combinaison linéaire des solutions est aussi une solution.

$$\boxed{x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t},} \quad C_1, C_2 = \text{cstes dépendant des conditions initiales}$$

■ Faculté des sciences de base

■ Swiss Plasma Center

On distingue 3 cas en fonction du signe du terme qui se trouve sous la racine:

① $$B^2 - 4AC > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \qquad \lambda_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Les deux racines sont réelles.

② $$B^2 - 4AC = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-B}{2A}$$

Les deux racines sont réelles et confondues

③ $$B^2 - 4AC < 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \qquad \lambda_1 = \frac{-B}{2A} + i\,\frac{\sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A}, \qquad \lambda_2 = \frac{-B}{2A} - i\,\frac{\sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A}$$

Les deux racines sont complexes conjuguées

① $$B^2 - 4AC > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}, \quad C_1, C_2 = \text{cstes dépendant des conditions initiales}$$

On pose (pour une raison qui apparaîtra lorsqu'on traitera l'oscillateur harmonique fortement amorti):

$$\tau_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \qquad \tau_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$$

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}} + C_2\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Il faut encore exprimer les constantes en fonction des conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{l} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad C_1, C_2$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} + C_2\, e^{-\frac{t}{\tau_2}} \\ v(t) = -\dfrac{C_1}{\tau_1}\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \dfrac{C_2}{\tau_2}\, e^{-\frac{t}{\tau_2}} \end{cases} \xrightarrow[t=0]{} \begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 \\ -\dfrac{C_1}{\tau_1} - \dfrac{C_2}{\tau_2} = v_0 \end{cases}$$

On résout le système de deux équations à deux inconnues pour trouver:

$$C_1 = \frac{\tau_1(x_0 + v_0\tau_2)}{(\tau_1 - \tau_2)} \quad , \quad C_2 = \frac{\tau_2(x_0 + v_0\tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}$$

Et finalement:

$$\boxed{x(t) = \frac{\tau_1(x_0 + v_0\tau_2)}{(\tau_1 - \tau_2)}\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2(x_0 + v_0\tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}\, e^{-\frac{t}{\tau_2}}}$$

Cas ③: établissement de la solution

③ $B^2 - 4AC < 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

Les solutions de l'équation caractéristique sont:

$$\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i = \underbrace{\frac{-B}{2A}}_{\lambda_r} + i\underbrace{\frac{\sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A}}_{\lambda_i} \qquad \lambda_2 = \lambda_1^* = \lambda_r - i\lambda_i = \frac{-B}{2A} - i\,\frac{\sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A}$$

On réécrit la solution générale de l'équation différentielle,

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}\,\mathrm{e}^{i\lambda_i t} + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}\,\mathrm{e}^{-i\lambda_i t} \qquad x(t), \lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

puis on utilise la formule d'Euler, on développe et on regroupe les termes en cos et sin,

$$\mathrm{e}^{i\lambda_i t} = \cos(\lambda_i t) + i\sin(\lambda_i t) \quad , \quad \mathrm{e}^{-i\lambda_i t} = \cos(\lambda_i t) - i\sin(\lambda_i t)$$

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}\,\cos(\lambda_i t) + iC_1\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}\,\sin(\lambda_i t) + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}\,\cos(\lambda_i t) - iC_2\,\mathrm{e}^{\lambda_r t}\,\sin(\lambda_i t)$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_r t}\left[\cos(\lambda_i t)\,\underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_3} + \sin(\lambda_i t)\,\underbrace{i(C_1 - C_2)}_{C_4}\right]$$

Cas ③: La fonction x(t) doit être réelle

La fonction x(t) doit être réelle en tout temps $x(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t$

$$t = 0: \qquad x(0) = C_3 \qquad \Longrightarrow \qquad C_3 \in \mathbb{R}$$

$$t = \frac{\pi}{2\lambda_i}: \qquad x\left(\frac{\pi}{2\lambda_i}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda_r \pi}{2\lambda_i}} C_4 \qquad \Longrightarrow \qquad C_4 \in \mathbb{R}$$

et donc:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_r t} \left[C_3 \cos(\lambda_i t) + C_4 \sin(\lambda_i t)\right] \qquad x(t), \lambda_r, \lambda_i, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$$

Cas ③: conditions initiales

on applique ensuite les conditions initiales:

$$\begin{cases} x(0) & = & x_0 \\ v(0) & = & v_0 \end{cases}$$

$$x(0) = x_0 = 1\,[C_3 + 0] \quad \Longrightarrow \quad C_3 = x_0$$

$$v(t) = \lambda_r \mathrm{e}^{\lambda_r t}\,[C_3\,\cos(\lambda_i t) \;+\; C_4\,\sin(\lambda_i t)] + \mathrm{e}^{\lambda_r t}\,[-C_3\lambda_i\,\sin(\lambda_i t) + C_4\lambda_i\,\cos(\lambda_i t)]$$

$$v(0) = v_0 = \lambda_r\,C_3 + C_4\,\lambda_i \quad \Longrightarrow \quad C_4 = \frac{v_0 - \lambda_r\,C_3}{\lambda_i} = \frac{v_0 - \lambda_r\,x_0}{\lambda_i}$$

et finalement:

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_r t}\left[x_0\,\cos(\lambda_i t) + \frac{(v_0 - \lambda_r x_0)}{\lambda_i}\,\sin(\lambda_i t)\right]}$$

Application au cas de l'oscillateur harmonique simple

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

$$\begin{cases} A &= 1 \\ B &= 0 \\ C &= \dfrac{k}{m} = \omega_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_r &= \dfrac{B}{2A} = 0 \\ \lambda_i &= \dfrac{\sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \omega_0 \end{cases}$$

Il suffit de remplacer dans la solution:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_r t} \left[x_0 \, \cos(\lambda_i t) + \frac{(v_0 - \lambda_r x_0)}{\lambda_i} \, \sin(\lambda_i t) \right]$$

pour obtenir:

$$\boxed{x(t) = \left[x_0 \, \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \, \sin(\omega_0 t) \right]}$$

Application au cas de l'oscillateur harmonique amorti

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x} + \frac{k}{m}x(t) = 0 \qquad \begin{cases} A &= 1 \\ B &= 2\gamma \\ C &= \dfrac{k}{m} = \omega_0^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_r &= \dfrac{B}{2A} = -\gamma \\ \lambda_i &= \dfrac{\sqrt{|B^2 - 4AC|}}{2A} = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} = \omega \end{cases} \qquad \omega < \omega_0$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_r t}\left[x_0 \cos(\lambda_i t) + \frac{(v_0 - \lambda_r x_0)}{\lambda_i}\sin(\lambda_i t)\right]$$

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{(v_0 + \gamma x_0)}{\omega}\sin(\omega t)\right]}$$